

Allerlei Abstände

Teil 1: eindimensional

Eine Reise durch die Mathematik zum Thema Abstände

Es geht hier um Abstände von Zahlen auf dem Zahlenstrahl (x-Achse).
Dabei werden auch Betrags-Ungleichungen verwendet, mit denen man Zahlen suchen kann, die in einem vorgegebenem Abstand zu einer anderen Zahl stehen.

Es folgen noch die Texte:

41010 Allerlei Abstände 2 – in der x-y-Ebene

41011 Allerlei Abstände 3 – im x-y-z-Raum

Text Nr. 41091

Stand: 5. März 2026

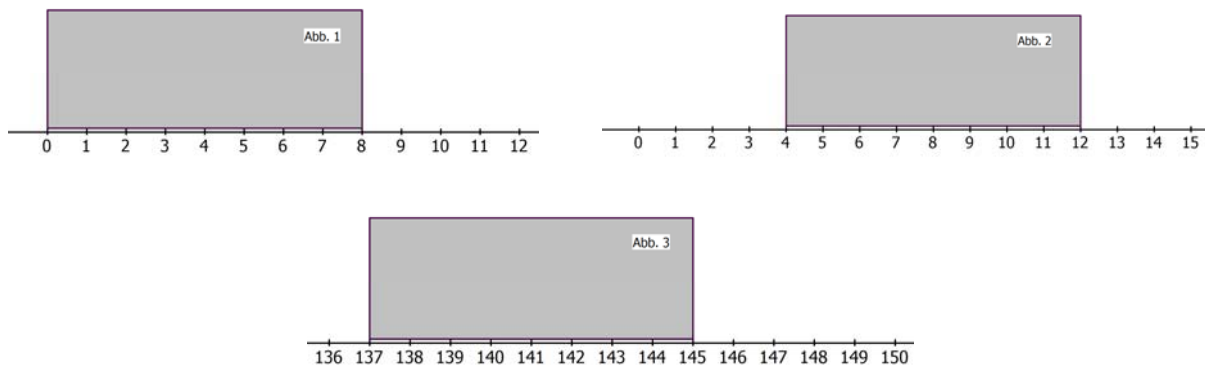
**INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM**

<https://mathe-cd.de>

1. Eindimensionale Anordnung – am Zahlenstrahl.

1 Geordnete Zahlen am Zahlenstrahl.

Im Text 01065 habe ich für den Grundschulbereich einen Text erstellt, der sich mit der Anordnung der natürlichen Zahlen auf einem Zahlenstrahl befasst. Ich habe drei Zeichnungen gemacht, die alle dasselbe Rechteck zeigen. Daneben befindet sich ein Zahlenstrahl, an dem man ablesen kann, wo das Rechteck beginnt und wo es endet. Wir wollen uns überlegen, wie man aus Anfang und Ende die Länge des Rechtecks bestimmen kann.



In Abbildung 1 liegt die Marke 0 am Beginn des Rechtecks, sodass man am rechten Ende die Länge 8 (cm) ablesen kann.

Das wird in Abbildung 2 etwas komplizierter. Man muss rechnen: $12 - 4 = 8$.

In Abbildung 3 berechnet man die Länge so: $145 - 137 = 8$.

Wir wollen das verallgemeinern. Wir stellen uns eine Messstrecke vor, die bei der Marke a beginnt und bei b endet. Dann wird der Leser für die Längenberechnung die Formel $L = b - a$ verwenden. Ein anderer wird vielleicht $L = a - b$ angeben. Wer hat nun Recht?

Das hängt nun davon ab, ob a oder b die größere Zahl ist.

Ist $a > b$, z. B. $a = 34$ und $b = 12$, dann ist $L = a - b = 34 - 12 = 22$ die Länge der Strecke.

Ist $a < b$, z. B. $a = 17$ und $b = 28$ dann ist b die größere Zahl und man muss als Länge so berechnen:

$$L = b - a = 28 - 17 = 11$$

Es sieht also aus als ob man keine einheitliche Formel für die Länge angeben kann. Das ist aber falsch. Wenn man für die Länge einer Strecke von der Zahl a zur Zahl b dennoch eine Formel angeben soll, dann kann man mit $L = a - b$ oder $L = b - a$ beginnen.

Man sollte jedoch wissen, dass eventuell eine negative Zahl das Ergebnis ist. nämlich dann, wenn man die größere Zahl subtrahiert hat. Dieses Ergebnis ist nicht brauchbar:

Eine Länge hat immer eine nicht negative Maßzahl!

**Die Mathematiker haben daher den Betrag einer Zahl erfunden:
Er soll eine negative Zahl positiv machen:**

Der Betrag von -6 ist 6 und man schreibt: $|-6| = 6$
 Der Betrag von 12 ist 12, denn 12 ist schon positiv.

Das hilft bei unserer Abstandberechnung ganz enorm:

Die Formel $L = |a - b|$ ist immer richtig, ebenso $L = |b - a|$,

egal, wer die größere oder kleinere Zahl ist.

Beispiele:

$$a = 24, b = 5 \Rightarrow L = |a - b| = |24 - 5| = |19| = 19 \text{ oder } L = |b - a| = |5 - 24| = |-19| = 19$$

$$a = 4, b = 30 \Rightarrow L = |a - b| = |4 - 30| = |-26| = 26 \text{ oder } L = |b - a| = |30 - 4| = |26| = 26$$

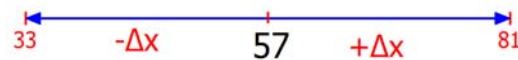
Und man versteht auch gleich, dass man die Zahlen der Differenz vertauschen kann:

$$|5 - 24| = |24 - 5| = 19$$

Bis jetzt haben wir Abstände von Zahlen berechnet. Jetzt suchen wir Zahlen in bestimmtem Abstand.

2 Zahlen im gegebenen Abstand suchen.

- a) Welche Zahlen sind von 57 um die Strecke $\Delta x = 24$ entfernt?



Man rechnet: $x_1 = 57 + 24 = \boxed{81}$

und $x_2 = 57 - 24 = \boxed{33}$

Man geht also von 57 aus und addiert bzw. subtrahiert den gegebenen Abstand.

Man liest Δx als *Delta x und bezeichnet damit eine Differenz zweier x-Werte, hier also den Abstand.*

- b) Beschreibe die Aufgabe mit Worten und bestimme die Lösungsmenge:

$$|x - 15| \leq 13$$

- c) $|x + 48| \geq 100$

Die Lösung steht in Absatz 3

- 3 b) $|x - 15| \leq 13$ Als Grundmenge nehmen wir die reellen Zahlen.

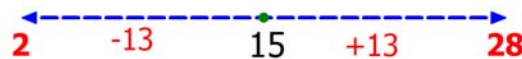
Wissen: Mit dem Betrag aus der Differenz wird der Abstand der Zahlen x und 15 berechnet.

Die gesuchte Zahl x kann kleiner oder größer als 15 sein.

Dafür sorgt der Betrag.

Und dieser Abstand soll höchstens (kleiner oder gleich) 13 sein.

Hilfreich ist dieses Diagramm am Zahlenstrahl:



Wenn man die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen zugrunde legt, besteht die Lösungsmenge aus allen ganzen Zahlen von 2 bis 28, was man so schreiben kann:

$$\mathbb{L} = \{ 2; 3; \dots; 15; \dots 27; 28 \}$$

Es gibt eine schriftliche Lösungsmethode, die man so aufschreiben kann:

Mit Betrag:

$$|x - 15| \leq 13$$

Ohne Betrag:

$$-13 \leq x - 15 \leq 13 \quad | +15$$

$$-13 + 15 \leq x - 15 + 15 \leq 13 + 15$$

Intervallschreibweise:

$$2 \leq x \leq 28$$

Doppelungleichung.

Die dritte Zeile kann man weglassen. Das rechnet man.

Die Lösungsmenge schreibt man als geschlossenes Intervall $\mathbb{L} = [2 : 28]$

Es umfasst alle Zahlen von 2 bis 28.

- c) Eine neue Aufgabe: $|x + 48| \geq 100$ (Eine „Größer-Ungleichung“)

Da der Abstand von Zahlen durch eine Differenz berechnet wird, muss man die Aufgabe so ändern, dass eine Differenz im Betrag steht:

$$|x - (-48)| \geq 100$$

In Worten heißt die Aufgabe dann:

Welche Zahlen haben von der negativen Zahl -48 mindestens den Abstand 100?

Löse bitte diese Aufgabe mit Hilfe eines Zahlenstrahls. $\Rightarrow$



Zuerst eine graphische Lösung von $|x - (-48)| \geq 100$:



Die zentrale Zahl (der Intervall-Mittelpunkt) ist hier 48.
Der Intervallradius ist 100.

Geht man von -48 um 100 nach links, kommt man zu $-48 - 100 = -148$.

Geht man von -48 um 100 nach rechts, kommt man zu $-48 + 100 = 52$.

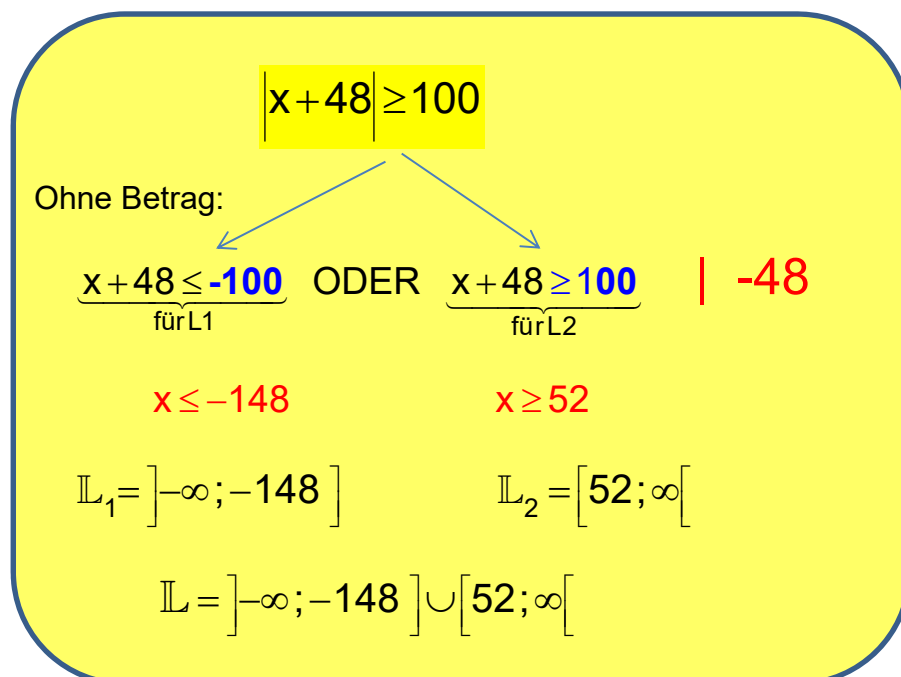
Da der Abstand aber mindestens 100 sein soll, ist die Lösungsmenge der Außenbereich, also die Vereinigung dieser beiden Intervalle:

$$\mathbb{L} =]-\infty; -148] \cup [52; \infty[$$

Wenn man diese Intervallschreibweise verwendet, legt man die Menge der reellen Zahlen zugrunde!

Es gibt eine **algebraisch orientierte Schreibweise** für die Lösung dieser Ungleichung:

Wenn man den Betrag weglässt, muss man bei der Mindestens-Ungleichung dafür zwei Ungleichungen verwenden, für jede der beiden Lösungsmengen eine:



4**Übungsaufgaben zur Abstandsberechnung von Zahlen**

Formuliere die Aufgaben mit Worten und gib die Lösungsmenge an.

Die Grundmenge sei $\mathbb{R}$, die Menge der reellen Zahlen.

Ich zeige die graphische und die algebraische Lösung.

Gleichungen

(1)	$ x - 36 = 14$
-----	-----------------

(2)	$ x + 7 = 8$
-----	---------------

(3)	$ -4 - x = 12$
-----	-----------------

(4)	$ 2x - 6 = 33$
-----	-----------------

Ungleichungen

(5)	$ x - 35 < 25$
-----	-----------------

(6)	$ x + 82 \leq 28$
-----	--------------------

(7)	$ x + 25 > 7$
-----	----------------

(8)	$ x - 60 \geq 20$
-----	--------------------

Lösungen zu 4

Zuerst die vier Betragsgleichungen

(1) $|x - 36| = 14$



Welche Zahlen haben von 36 den Abstand 14?

Algebra: $x - 36 = \pm 14 \Rightarrow x_{1,2} = 36 \pm 14 = \begin{cases} 50 \\ 22 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{L} = \{ 22; 50 \}$

(2) $|x + 7| = 8$



Welche Zahlen haben von -7 den Abstand 8?

Algebra: $x + 7 = \pm 8 \Rightarrow x_{1,2} = -7 \pm 8 = \begin{cases} 1 \\ -15 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{L} = \{ 1; -15 \}$

(3) $|-4 - x| = 12$



Tipp: Weil $|-a| = |a|$ kann man die Aufgabe umschreiben in $|4 + x| = 12$

Algebra: $4 + x = \pm 12 \Rightarrow x_{1,2} = 4 \pm 12 = \begin{cases} 16 \\ -8 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{L} = \{ 16; -8 \}$

(4) $|2x - 6| = 33$



Hier wird eine Angabe über das Doppelte einer Zahl gemacht.

Algebra: $2x - 6 = \pm 33 \Rightarrow 2x = 6 \pm 33 \Rightarrow x = \begin{cases} 19,5 \\ -13,5 \end{cases}$

Diese Betragsgleichungen haben immer genau zwei Lösungszahlen. Denn es gibt immer eine größere und eine kleinere Lösungszahl.....

Dann die vier Betragsungleichungen

Zuerst zwei Kleiner-Ungleichungen.

(5) $|x - 35| < 25$ 

Welche Zahlen haben von 35 einen Abstand weniger als 25?

Algebra:

$$\begin{aligned}
 |x - 35| &< 25 \\
 -25 &< x - 35 < 25 & | +35 \\
 -25 \boxed{+35} &< x - 35 \boxed{+35} < 25 \boxed{+35} \\
 10 &< x < 60
 \end{aligned}$$

Lösungsmenge $\mathbb{L} =] -10; 60 [$

Das ist ein **offenes Intervall**, weil die Randzahlen nicht zur Menge gehören

(6) $|x + 82| \leq 28$ 

Welche Zahlen haben von -82 einen Abstand von höchstens 28?

Algebra:

$$\begin{aligned}
 |x + 82| &\leq 28 \\
 -28 &\leq x + 82 \leq 28 & | -82 \\
 -28 \boxed{-82} &\leq x + 82 \boxed{-82} \leq 28 \boxed{-82} \\
 -110 &\leq x \leq -54
 \end{aligned}$$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = [-110; -54]$

Das ist ein **abgeschlossenes Intervall**, weil die Randzahlen zur Menge gehören!

Jetzt zwei Größer-Ungleichungen

(7)

$$|x + 25| > 7$$

Welche Zahlen haben von -25 einen Abstand **größer als** 7?

Algebra:

$$|x + 25| > 7$$

Ohne Betrag:

$$-7 < x + 25 \quad \text{ODER} \quad x + 25 > 7 \quad | -25$$

$$-32 < x \quad \text{ODER} \quad x > -18$$



$$\mathbb{L} =]-\infty; -32[\cup]-18; \infty[$$

Merke: Bei Größer-Ungleichungen besteht die Lösungsmenge aus zwei Intervallen, da eine enthält Zahlen, die einen größeren Abstand nach oben haben als in der Ungleichung angegeben, die andere enthält Zahlen mit größerem Abstand nach unten.

(8)

$$|x - 60| \geq 20$$

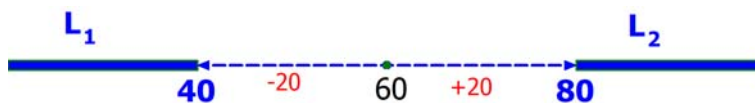
Welche Zahlen haben von 60 einen Abstand von **mindestens** 20

Algebra:

$$|x - 60| \geq 20$$

$$\text{Ohne Betrag: } -20 \leq x - 60 \quad \text{ODER} \quad x - 60 \geq 20 \quad | +60$$

$$40 \leq x \quad \text{ODER} \quad x \geq 80$$



$$\mathbb{L} =]-\infty; 40] \cup [80; \infty[$$